Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi
The Journal of International Social Research
Cilt: 10 Sayı: 50 Volume: 10 Issue: 50
Haziran 2017 June 2017
www.sosyalarastirmalar.com Issn: 1307-9581

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MİNİMİZASYON PROBLEMİ İÇİN MATEMATİKSEL MODEL VE UYGULAMASI: KİMYASAL GÜBRE ALIMI

MATHEMATICAL MODEL FOR LINEAR PROGRAMMING MINIMIZATION PROBLEM AND IT'S APPLICATION: CHEMICAL FERTILIZER PURCHASE

Bahatdin DAŞBAŞI[*]
Teslima DAŞBAŞI[**]

Öz

Bu çalışmada, lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin analizinde kullanılan bazı teori ve tekniklere yer verildi. Bu bağlamda, lineer olmayan otonom diferansiyel denklem sistemlerine odaklanıldı. Bu tipten bir sistem için bir denge çözümü ve bu denge çözümünün yerel kararlılığı ile ilgili tanımlar açıklanmaya çalışıldı. Böylece, bu tip sistemlerin çözümlerinin davranışı hakkında fikirler veren sistemin kalitatif analizi ifade edildi.

Daha sonra diferansiyel denklem sistemi şeklinde bir DP minimizasyon problemi kuruldu. Bu kurulan matematiksel modelin kalitatif analizi yapıldı. Bu bağlamda modelin uygulaması olarak kimyasal gübre alımı ile ilgili durum, pplane.jar ve matlab simülasyon programlarıyla analiz edildi. Kalitatif ve nümerik analizin sonuçları karşılaştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Programlama, Matematiksel Model, Diferansiyel Denklem Sistemi, Kararlılık, Kalitatif Analiz.

Abstract

In this study, some theory and techniques useful in the analysis of nonlinear ordinary differential equation systems are introduced. In this sense, it is concentrated on nonlinear autonomous differential equation systems. An equilibrium solution and local stability of an equilibrium solution for an autonomous system are tried to defined. Thus, the qualitative analysis of system given the idea about the behavior of the solutions of this type of systems was expressed.

Lastly, a DP minimization problem was established in the form of a system of differential equations. Qualitative analysis of this established mathematical model was done. In this respect, The situation regarding the purchase of chemical fertilizer as a model application has analyzed via pplane.jar and matlab simulation programs. The results of qualitative and numerical analysis were compared.

Keywords: Linear Programming, Mathematical Modeling, Differential Equation Systems, Stability, Qualitative Analysis.

1. GİRİŞ

Günümüzde bilim adamları etrafımızdaki olayları daha iyi anlayabilmek ve bunlara ilişkin teknik sorunlara çözüm üretebilmek için herşeyi matematiksel terimler yoluyla açıklamaya çalışmaktadırlar. İşte olayları matematiksel terimler aracılığıyla ifade ederek yapılan bu işlem ve düşünce şekline matematiksel modelleme denmektedir. Özellikle sosyal bilimler içerisinde de giderek artan bir şekilde kullanılan bu modellerin önemli bir yeri vardır (Basu, 2009). Ülke gelir modelleri, piyasa arz-talep durum modellemesi, İş Organizasyon modellemesi, Makro ve Mikroekonomilerin matematiksel modellemesi ve Ekonomi ve Adaptif kontrol sistemlerinin matematiksel modellemesi gibi çok farklı uygulamalarda etkin bir şekilde uygulamaktadırlar (Harris, 1995; Johansen & Juselius, 1990; Rousseau & P, 1998; Tobin, 1970; Baraz & Daşbaşı, 2016).

Bu modelleme tekniğinin diferansiyel denklemler yardımıyla kullanımı oldukça yaygın olup konuyla ilgili finans, muhasebe ve iktisat alanlarında birçok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları; (Achdou, Lasry, Lions, & Moll, 2014), (Achdou, Buera, Lasry, Lions, & Moll, 2014), (Alligood, Sauer, & Yorke., 2000), (Arrow, Block, & Hurwicz, On Stability of Competitive Equilibrium, 1959), (Arrow & Hahn., General Competitive Analysis, 1971), (Hahn, 1982), (Barro & Sala-i-Martin, 2004), (Block & Coppel, 1992), (Boyce & DiPrima, 2001), (Cagan, 1956), (Caputo, 2005), (Chiang, 1984), (Crephey, 2013), (Duffie, 2009), (Hirsh, 1974), (Kaldor, 1940), (Lee, Lee, & Lee, 2010), (Lorenz, 1993), (Merton, Influence of mathematical models in finance on practice: past, present and future., 1995), (Minsky, 1980), (Myers, 1984), (Neisy & Peymany, 2011), (O'Brien, 1992), (Peitgen, 1992), (Puu, 2003), (Sharpe, 1964), (Shone, 2002), (Solnik, 1974), (Solow, 1956), (Swan, 1956), (Yerlikaya, 2011), (Weidlich & Haag, 1983), (Zhang W. B., Synergetic Economics, 1991) ve (Zhang W. B., Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics, 2005) şeklindedirler.

[*] Erciyes Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu, Muhasebe ve Finans Yönetimi Bölümü, 38039, Kayseri.
[**] Cumhuriyet Üniversitesi, Gemerek M.Y.O., Kimya ve Kimyasal İşleme Teknolojileri Bölümü, 58840, Sivas

Bu çalışmada genel bir doğrusal programlama minimizasyon problemiyle uyumlu olarak önerilen üç boyutlu bir diferansiyel denklem sistemi önerilerek modelin analizi hem kalitatif olarak hem de bir kimyasal gübre alım problemine ilişkin olacak şekilde grafiksel olarak analiz edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu kısımda, çalışmada önerilen matematiksel modelin kalitatif analizinde kullanılan sürekli zamanlı diferansiyel denklem ve sistemleriyle alakalı temel kavramlar kısaca tanıtılmaya çalışılmıştır.

Tanım 2.1. $F(X) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n))^t$ ve $X = (x_1,\dots,x_n)^t$ olmak üzere, otonom (bağımsız değişken olan t ' nin denklemde açıkça görülmediği) diferansiyel denklem sistemi,

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad \mathbf{(1)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bir başlangıç değer problemi, $X(t_0) = X_0$ başlangıç koşulunu sağlayan (1) diferansiyel denklem sistemidir (Brauer & Nohel, 1969; Coddington & Levinson, 1955).

Teorem 2.1.(Allen, 2007) (1) sisteminde tanımlanan her $i = 1,2,\dots,n$ için F ve $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ için sürekli fonksiyonlar olduklarını varsayalım. O zaman herhangi bir $X_0 \in \mathbf{R}^n$ başlangıç değeri için,

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad \mathbf{(2)}$$
$$X(t_0) = X_0.$$

başlangıç değer probleminin tek bir çözümü vardır ve çözümün var olduğu maksimal aralık olan $[t_0, t)$ aralığı $T < \infty$ olmak üzere $[t_0, T)$ aralığına sınırlanabilir.

(2) sisteminin $X(t) = (x_1(t), x_2(t),\dots,x_n(t))$ çözümü $\mathbb{R}^n$ de parametrik bir eğri tanımlar. Bu eğri, sistemin bir yörüngesi (orbiti ya da yolu) olarak tanımlanır. Çözümün çizildiği $\mathbb{R}^n$ bölgesi $n = 1$ olduğunda faz çizgisi, $n = 2$ olduğunda faz düzlemi ve $n = 3$ olduğunda faz uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. (Denge Çözümü) (1) diferansiyel denklem sistemi için $F(\overline{X}) = 0$ denklemini sağlayan $\overline{X}$ çözümüne sistemin denge noktası, sabit noktası veya kritik noktası adı verilir (Hale & Koçak, 1991).

Tanım 2.3. (Yerel Kararlılık) (2) başlangıç değer problemini göz önüne alınsın. Ayrıca $\overline{X}$, sistemin bir denge noktası olsun. $\forall\varepsilon > 0$ ve $t > t_0$ için, $\|X_0 - \overline{X}\|_n < \delta$ olacak şekilde (2) diferansiyel denklem sisteminin $X(t)$ çözümü için $\|X(t) - \overline{X}\|_n < \varepsilon$ koşulunu sağlayan öyle bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, o zaman (2) sistemi için $\overline{X}$ denge noktası yerel kararlıdır denir. Eğer $\overline{X}$, yerel olarak kararlı değilse kararsızdır denir(Allen, 2007).

Tanım 2.4. (Yerel Asimtotik kararlılık) $\overline{X}$, (2) sisteminin bir denge noktası olsun. Eğer,

- $\overline{X}$ denge noktası yerel kararlı ve
- $\|X_0 - \overline{X}\|_n < \gamma$ olduğunda $\lim_{t\to\infty}\|X(t) - \overline{X}\|_n = 0$ olacak şekilde bir $\gamma > 0$ var ise

$\overline{\mathbf{X}}$, yerel asimtotik kararlıdır denir (Allen, 2007; Edelstein-Keshet, 1988).

Teorem 2.2. (-Hurwitz matrisleri) Her $i = 1,2,\dots,n$ için a_i katsayıları reel sabitleri göstersin.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n,$$

polinomunun a_i katsayılarını kullanarak

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots, H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & . & & . & & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılan matrisler, -Hurwitz matrislerini tanımlar. Burada $j = 1,2,\dots,n$ için $j > n$ ise $a_j = 0$ ' dır. $P(\lambda)$ polinomunun tüm köklerinin negatif ya da negatif reel kısımlara sahip olması için gerek ve yeter şart tüm Hurwitz matrislerinin determinantlarının pozitif olmasıdır. Yani $j = 1,2,\dots,n$ için $\det H_j > 0$ ' dır. Buna göre, $n = 2$, 3, **4** ve derecelerine sahip $P(\lambda)$ polinomları için, Routh-Hurwitz kriteri aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

$n = 2$: $a_1, a_2 > 0$

$n = 3$: $a_1, a_3 > 0$ ve $a_1 a_2 > a_3$

$n = 4$: $a_1, a_3, a_4 > 0$ ve $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$

$n = 5$: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0, a_1 a_2 a_3 + a_1 a_5 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ ve $(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2$

(Gantmacher, 1954).

Birinci mertebeden, iki değişkenli otonom diferansiyel denklem sistemi,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad \textbf{(3)}$$

şeklinde ve bu sistemin $f(x, y) = 0$ ve $g(x, y) = 0$ denklemlerini sağlayan $(\bar{x}, \bar{y})$ çözümü, sistemin dengesi olsun. Ayrıca, f ve g fonksiyonları $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasını içeren açık bir kümede sürekli ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun. Bu durumda,

$$u = x - \bar{x}, \qquad v = y - \bar{y} \quad \textbf{(4)}$$

olmak üzere (3) den,

$$\frac{du}{dt} = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})u + f_y(\bar{x}, \bar{y})v + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\frac{u^2}{2} + f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})uv + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\frac{v^2}{2} + \cdots$$

$$\frac{dv}{dt} = g(\bar{x}, \bar{y}) + g_x(\bar{x}, \bar{y})u + g_y(\bar{x}, \bar{y})v + g_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\frac{u^2}{2} + g_{xy}(\bar{x}, \bar{y})uv + g_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\frac{v^2}{2} + \cdots$$

sistemi elde edilir. $Z = (u, v)^T$ ve dengede hesaplanan jakobiyen matris $J = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix}_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$ olmak üzere, $(\bar{x}, \bar{y})$ dengesi civarındaki lineerleştirilmiş sistem,

$$\frac{dZ}{dt} = JZ \quad \textbf{(5)}$$

şeklindedir. (5) lineer sistemi için çözümlerinin (4) dönüşümü ile sıfıra yaklaşması için gerek ve yeter şart jakobiyen matristen elde edilen öz değerlerin negatif reel kısma sahip olmasıdır. Aynı zamanda Routh-Hurwitz kriterinden, öz değerlerin negatif reel kısımlara sahip olması için gerek ve yeter şart yine Teorem 2.2 ($n = 2$) den jakobiyen matristen elde edilen karakteristik polinomun katsayılarının her ikisi de pozitif olmalıdır. Burada jakobiyen matrisin karakteristik polinomu;

$$\lambda^2 - Tr(J)\lambda + Det(J) = 0 \quad \textbf{(6)}$$

şeklindedir. Böylece öz değerlerin negatif reel kısımlara sahip olması için gerek ve yeter şart $Tr(J) < 0$ ve $Det(J) > 0$ olmasıdır. Buna göre (3) sistemi için denge noktasının kararlılığıyla ilgili sonuçlar aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

Teorem 2.3. (3) sisteminin $(\bar{x}, \bar{y})$ dengesini içeren bazı açık kümelerde f ve g fonksiyonlarının birinci mertebeden kısmi türevlerinin sürekli olduklarını varsayalım. O zaman J , denge noktasında hesaplanan jakobiyen matrisi göstermek üzere, eğer $Tr(J) < 0$ ve $Det(J) > 0$ ise bu denge yerel asimtotik kararlıdır. Ayrıca eğer $Tr(J) > 0$ veya $Det(J) < 0$ ise bu denge kararsızdır (Allen, 2007).

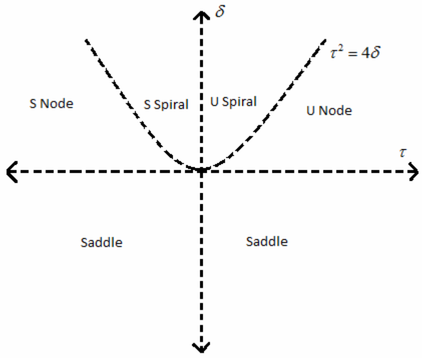
Lineer olmayan sistemlerdeki dengelerin tiplerini (düğüm (node), eyer (saddle), sipiral (spiral)) tanımlamak için lineer sistemler için geliştirilen şema kullanılmaktadır. Lineer olmayan sistemlerde ise bu durumlardan farklı bir şekilde davranabilir. (3) sistemi için jakobiyen matrisi göz önüne alınırsa;

(i) $Det(J) = 0$ ise en az bir öz değer sıfırdır. Lineer sistemlerde denge izole değildir. Lineer olmayan sistemlerde de durum aynıdır. Eğer orada izole olan bir denge olmuş olsaydı o zaman bir düğüm, sipiral ya da eyer olabilirdi.

(ii) $Tr(J) = 0$ ve $Det(J) > 0$ ise öz değerler sanaldırlar. Denge lineer sistemlerde bir merkez (center) olmasına rağmen lineer olmayan sistemlerde bir merkez ya da sipiral olabilir.

(iii) $(Tr(J))^2 = 4Det(J)$ ise bu kompleks ve reel öz değerler arasında bir sınır çizgisini temsil eder. Böylece lineer olmayan sistemlerde denge bir düğüm ya da sipiral olabilir.

Yukarıda ifade edilen (i)-(iii) durumları Şekil 1 de özetlenmiştir.



Şekil 1. $\tau = Tr(J)$ ve $\delta = Det(J)$ olsun. (6) de verilen karakteristik denkleme göre $\tau\delta -$ düzlemindeki kararlılık diyagramı (U: Unstable, S: Stable)

Ayrıca, $Det(J) = 0$, $Tr(J) = 0$ ve $Det(J) > 0$ ve $(Tr(J))^2 = 4Det(J)$; denge noktasının davranışının iki tipi arasındaki geçiş bölgeleridir (Allen, 2007).

İki diferansiyel denklemden daha fazlasını içeren lineer olmayan otonom bir sistemdeki denge noktasının yerel asimtotik kararlılığı da, Teorem 2.2' de ifade edilen Routh-Hurwitz kriterine bağlıdır. Böylece Routh-Hurwitz kriteri yerel asimtotik kararlılığı göstermek için uygulanabilir.

Teorem 2.4. (Allen, 2007; Gantmacher, 1954) $\overline{X}$, $\frac{dX}{dt} = F(X)$ şeklinde verilen birinci mertebeden lineer olmayan otonom diferansiyel denklem sisteminin denge noktası olsun. Ayrıca $J(\overline{X})$ ise $\overline{X}$ noktasında hesaplanan F fonksiyonunun jakobiyen matrisini göstersin. Eğer $J(\overline{X})$ jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi olan

$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$,

denklemi, Teorem 2.2 deki Routh-Hurwitz kriterinin koşullarını sağlarsa, yani tüm Hurwitz matrislerinin determinantları pozitifse, ($j = 1,2,\dots,n$ için $det(H_j) > 0$) o zaman $\overline{X}$ dengesi yerel asimtotik kararlıdır. Ancak, eğer bazı $j = 1,2,\dots,n$ için $det(H_j) < 0$ ise o zaman $\overline{X}$ dengesi kararsızdır.

Tanım 2.5. (Faz-Düzlem) Bu kısımda verilen açıklamalar (3) sistemi için sınırlandırılmıştır. f ve g fonksiyonlarının sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olduklarını varsayalım. $xy-$ düzleminde verilen bir (x_0, y_0) noktasından geçen sadece bir çözüm eğrisi vardır. Herhangi bir (x, y) noktası için $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$ ifadesi, $xy-$ düzlemindeki yörüngenin eğimini ve $(f(x,y), g(x,y))^T$ teğet vektörü ise yörüngenin yönünü verir. Denge noktaları sabit noktalar oldukları için bu noktalarda yön yoktur. Vektörlerin birleşimi bir yönlü alan tanımlar. Yönlü alan, bir faz-düzlem portresi ya da bir faz-düzlem diyagramı olarak adlandırılan çözüm eğrilerinin bir ailesinin çiziminde yardımcı olarak kullanılabilir. Yönlü alanın tamamını çizmek yerine akışın yönünü belirlemek için daha etkili bir metot $x-$ ve $y-$ sıfır isocline ya da nullcline boyunca akış yönünü analiz etmektir (Allen, 2007).

3. ÖNERİLEN MODEL VE ANALİZİ

Bu çalışmada genel formda kısıtlayıcı koşullar altında tanımlanan bir DP minimizasyon problemi;

$$\begin{aligned} &\min \pi = k_1 x + k_2 y \\ &a_1 x + a_2 y \ge a_3 \\ &b_1 x + b_2 y \ge b_3 \qquad (7) \\ &x, y > 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Genel olarak özellikle, girdilerin istenilen koşulları sağlayacak şekilde minimize edilmesi birçok ekonomik ve sosyal bilimlerde çalışan araştırmacılar ve uygulayıcılar açısından uygundur.

3.1. Matematiksel Model

(7) DP problemine karşılık gelen lineer olmayan otonom birinci mertebeden üç boyutlu diferansiyel denklem sistemi şeklinde tanımlanan sistem;

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{\frac{a_3}{a_1}} - 1\right)\left(\frac{x}{\frac{b_3}{b_1}} - 1\right) \\ g(x,y,z) &= \frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{\frac{a_3}{a_2}} - 1\right)\left(\frac{y}{\frac{b_3}{b_2}} - 1\right) \qquad (8) \\ h(x,y,z) &= \frac{dz}{dt} = z\left(1 - \frac{z}{k_1 x + k_2 y}\right) \end{aligned}$$

şeklinde olsun. Burada; $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3 \neq 0$ ' dır. (8) sisteminin temel varsayımları şu şekilde özetlenebilir. t , zaman parametresini (bağımsız değişken) göstermek üzere, x değişkeni t zamanındaki birinci ürünün miktarını (adet), y değişkeni t zamanındaki ikinci ürünün miktarını (adet) ve z değişkeni ise yine t zamanındaki sırasıyla k_1 ve k_2 birim alış miktarlarına göre toplam maliyet miktarını göstermektedir. Ayrıca a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 ve b_3 değişkenleri ise kısıtlayıcı koşul parametreleridirler.

3.2. Matematiksel Modelin Denge Noktaları

Tanım 2.2'den (8) sistemin denge noktaları $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$,$g(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ ve $h(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ denklemlerinden elde edilir. Dolayısıyla;

$$\left(\frac{\bar{x}}{\frac{a_3}{a_1}}-1\right)\left(\frac{\bar{x}}{\frac{b_3}{b_1}}-1\right)=0$$
$$\left(\frac{\bar{y}}{\frac{a_3}{a_2}}-1\right)\left(\frac{\bar{y}}{\frac{b_3}{b_2}}-1\right)=0 \quad (9)$$
$$\bar{z}\left(1-\frac{\bar{z}}{k_1\bar{x}+k_2\bar{y}}\right)=0$$

denklem sisteminden elde edilen denge noktalarının genel formu $E_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, $i=1,\ldots,8$ olmak üzere sırasıyla; $E_1\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{a_3}{a_2},0\right)$, $E_2\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{b_3}{b_2},0\right)$, $E_3\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{a_3}{a_2},0\right)$, $E_4\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{b_3}{b_2},0\right)$, $E_5\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{a_3}{a_2},k_1\frac{a_3}{a_1}+k_2\frac{a_3}{a_2}\right)$, $E_6\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{b_3}{b_2},k_1\frac{a_3}{a_1}+k_2\frac{b_3}{b_2}\right)$, $E_7\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{a_3}{a_2},k_1\frac{b_3}{b_1}+k_2\frac{a_3}{a_2}\right)$ ve $E_8\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{b_3}{b_2},k_1\frac{b_3}{b_1}+k_2\frac{b_3}{b_2}\right)$ noktaları olarak bulunurlar.

İlk 4 denge noktası $\bar{z}=0$ durumunda, diğer 4 denge noktası ise $\bar{z}=k_1\bar{x}+k_2\bar{y}$ durumunda elde edilen denge noktalarıdırlar.

3.3. Matematiksel Modelin Denge Noktalarının Kararlılık Analizi

(8) sisteminin denge noktalarının kararlılık analizi için jakobiyen matris $J=\begin{pmatrix} f_x(x,y,z) & f_y(x,y,z) & f_z(x,y,z) \\ g_x(x,y,z) & g_y(x,y,z) & g_z(x,y,z) \\ h_x(x,y,z) & h_y(x,y,z) & h_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ şeklinde olup sistemde kısmi türevler alınıp yerlerine yazıldığında;

$$J=\begin{pmatrix} \frac{2\,xa_1b_1-a_1b_3-a_3b_1}{a_3b_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\,ya_2b_2-a_2b_3-a_3b_2}{a_3b_3} & 0 \\ \frac{k_1z^2}{(xk_1+yk_2)^2} & \frac{k_2z^2}{(xk_1+yk_2)^2} & 1-\frac{2\,z}{xk_1+yk_2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

olarak elde edilir. $E_i(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, $i=1,\ldots,8$ olmak üzere, Teorem 2.4′ den özdeğerler tüm denge noktaları için,

$$\lambda_1=1-\frac{2\,\bar{z}}{\bar{x}k_1+\bar{y}k_2}$$
$$\lambda_2=\frac{2\,\bar{x}a_1b_1-a_1b_3-a_3b_1}{a_3b_3} \quad (11)$$
$$\lambda_3=\frac{2\,\bar{y}a_2b_2-a_2b_3-a_3b_2}{a_3b_3}$$

şeklindedirler.

E_1, E_2, E_3 ve E_4 denge noktalarının tümünde $\bar{z}=0$ durumu dikkate alınarak (11)′ deki ilk denge noktasında bu durumun yerine yazılmasıyla $\lambda_1=1>0$ elde edilir. Bu 4 denge noktası kararsızdır. Burada bulunan noktalar için kararlılık koşulları aynı zamanda yerel asimtotik kararlılık koşullarıdır.

Tablo 1′de, bulunan tüm denge noktalarının kararlılıkları için jakobiyen matriste her bir denge noktasının sırasıyla hesaplanmasıyla elde edilen veriler ve kararlılık koşulları ile ilgili sonuçlar özetlenmiştir.

Tablo 1. (8) sisteminin denge noktaları ve bu noktaların kararlılık durumları

Denge Noktası	İlk Özdeğer
$E_1\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{a_3}{a_2},0\right)$	$\lambda_1=1>0$ (Kararsız)
$E_2\left(\frac{a_3}{a_1},\frac{b_3}{b_2},0\right)$	$\lambda_1=1>0$ (Kararsız)
$E_3\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{a_3}{a_2},0\right)$	$\lambda_1=1>0$ (Kararsız)
$E_4\left(\frac{b_3}{b_1},\frac{b_3}{b_2},0\right)$	$\lambda_1=1>0$ (Kararsız)

		Diğer İki Özdeğer	Yerel Asimptotik Kararlılık Koşulu
$E_5\Big(\frac{a_3}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, k_1\frac{a_3}{a_1} + k_2$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3 b_3}$ $\lambda_3 = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3 b_3}$	$\frac{b_1}{b_3} < \frac{a_1}{a_3}$ ve $\frac{b_2}{b_3} < \frac{a_2}{a_3}$
$E_6\Big(\frac{a_3}{a_1}, \frac{b_3}{b_2}, k_1\frac{a_3}{a_1} + k_2$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_3 b_3}$ $\lambda_3 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3 b_3}$	$\frac{b_1}{b_3} < \frac{a_1}{a_3}$ ve $\frac{a_2}{a_3} < \frac{b_2}{b_3}$
$E_7\Big(\frac{b_3}{b_1}, \frac{a_3}{a_2}, k_1\frac{b_3}{b_1} + k_2$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_3 b_3}$ $\lambda_3 = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_3 b_3}$	$\frac{a_1}{a_3} < \frac{b_1}{b_3}$ ve $\frac{b_2}{b_3} < \frac{a_2}{a_3}$
$E_8\Big(\frac{b_3}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, k_1\frac{b_3}{b_1} + k_2$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_3 b_3}$ $\lambda_3 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3 b_3}$	$\frac{a_1}{a_3} < \frac{b_1}{b_3}$ ve $\frac{a_2}{a_3} < \frac{b_2}{b_3}$

Ayrıca Tablo 1'de, belirli iki farklı ürün alımı için planlanan kısıtlayıcı koşullar altında önerilen bir matematiksel modelin zamana bağlı olarak kullanılan parametrelere göre muhtemel denge noktaları ve bu denge noktalarına hangi koşullar altında ulaşacağına ilişkin bilgiler vermektedir. Böylece kısıtlayıcı koşullar altında bu iki ürünün alım durumuyla ilgili çeşitli öngörülerde bulunulabilir. Dolayısıyla bu model yukarıdaki senaryoya uygun genel bir optimizasyon probleminin modeli olarak adlandırılabilir.

Önerme 3.1. $i, j = 5,6,7,8$ için her bir E_i dengesinin kararlı olduğu bölge Γ_i olsun. Bu takdirde $i \neq j$ için $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ olur.

İspat. Tablo 1' deki kararlılık koşulları dikkate alındığında, herhangi bir denge noktasını kararlı yapan koşul diğer bir denge noktası için sağlanmayacağı açıktır.

4. MATEMATİKSEL MODEL İÇİN UYGULAMA: KİMYASAL GÜBRE ALIMI:

Bir bahçıvan, 60 birim fosfat ve 300 birim kalsiyum içerecek şekilde kendi gübresini hazırlamak istiyor. Bunun için kullanacağı hazır gübrelerin birincisi (adet); 2 birim fosfat ve 15 birim kalsiyum içeriyor. İkinci bir hazır gübre (adet) ise 6 birim fosfat ve 12 birim kalsiyum içeriyor. Ayrıca birinci ve ikinci ürünler için maliyet fiyatları sırasıyla 5 TL ve 2,5 TL şeklinde olsun. x ve y sırasıyla t zamanındaki, birinci ve ikinci ürünün adet miktarlarını göstermek üzere; istenilen koşulları sağlayan minimum maliyeti veren gübre kombinasyonu için doğrusal problem;

$$\min \pi = 5x + 2{,}5y$$
$$\begin{aligned} 2x + 6y &\geq 60 \\ 15x + 12y &\geq 300 \\ x, y &> 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

ve buna karşılık gelen lineer olmayan otonom birinci mertebeden 3 boyutlu diferansiyel denklem sistemi şeklinde tanımlanan matematiksel sistem,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{\frac{60}{2}} - 1\right)\left(\frac{x}{\frac{300}{15}} - 1\right) \\ g(x,y,z) &= \frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{\frac{60}{6}} - 1\right)\left(\frac{y}{\frac{300}{12}} - 1\right) \qquad (13) \\ h(x,y,z) &= \frac{dz}{dt} = z\left(1 - \frac{z}{5x + 2{,}5y}\right) \end{aligned}$$

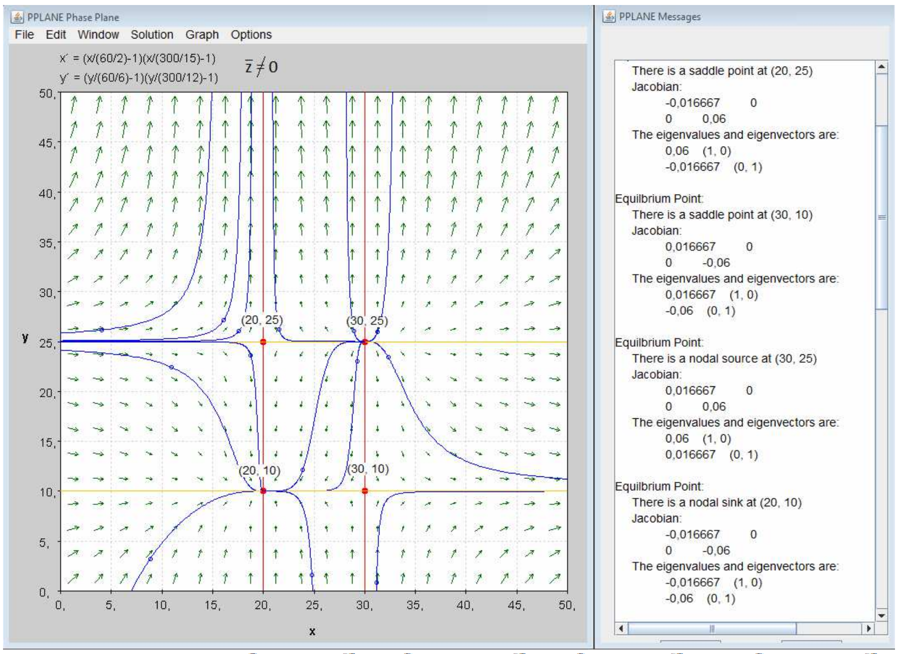
şeklinde olup (13) sistemi dikkate alındığında Tablo 1' e göre Tablo 2 elde edilir.

Tablo 2. Tablo 1' e göre (13) sisteminin kararlı olabilecek denge noktaları ve bu noktaların varlık ve yerel asimtotik kararlılık durumları

Denge Noktası	İlk Özdeğer
$E_1(30,10,0)$	$\lambda_1 = 1 > 0$ (Kararsız)
$E_2(30,25,0)$	$\lambda_1 = 1 > 0$ (Kararsız)
$E_3(20,10,0)$	$\lambda_1 = 1 > 0$ (Kararsız)
$E_4(20,25,0)$	$\lambda_1 = 1 > 0$ (Kararsız)

Denge Noktası	İlk Özdeğer	Diğer İki Özdeğer	Yerel Asimtotik Kararlılık durumu
$E_5(30,10,175)$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{1}{60} > 0$ ve $\lambda_3 = -\frac{3}{50} < 0$	Kararsız
$E_6(30,25,212.5)$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = \frac{1}{60} > 0$ ve $\lambda_3 = \frac{3}{50} > 0$	Kararsız
$E_7(20,10,125)$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = -\frac{1}{60} < 0$ ve $\lambda_3 = -\frac{3}{50} < 0$	Kararlı
$E_8(20,25,162.5)$	$\lambda_1 = -1 < 0$	$\lambda_2 = -\frac{1}{60} < 0$ ve $\lambda_3 = \frac{3}{50} > 0$	Kararsız

$\bar{z} \neq 0$ durumunda kararlı olması muhtemel olan 4 denge noktası Tablo 2′ de ifade edilmişti. Şekil 2′ de bu denge noktalarının kararlılık durumları pplane.jar simülasyon programı vasıtası ile gösterildi. Bu grafikte Tanım 2.5′ de belirtilen faz- düzlem diyagramı kullanıldı. Ok yönlerinin noktanın içine doğru olması bu noktanın kararlı olduğunu diğer durumlarda ise kararsız olduğunu göstermektedir. Burada $E_5(30, 10, 175)$, $E_6(30, 25, 212.5)$ ve $E_8(20, 25, 162.5)$ denge noktalarının kararsız noktalar oldukları buna karşın $E_7(20, 10, 125)$ denge noktasının yerel asimtotik kararlı bir nokta olduğu görülmektedir. Ayrıca şeklin sağ tarafındaki değerler herbir denge noktası için bulunan özdeğerler ve özvektörleri göstermektedir. Böylece Teorem 2.4′ den kararlılık koşulu için özdeğerlerin negatif ya da negatif gerçel kısımlara sahip olma şartı kontrol edilebilirdir.



Şekil 2. $\bar{z} \neq 0$ durumunda elde edilen $E_5(30,10,175)$, $E_6(30,25,212.5)$, $E_7(20,10,125)$ ve $E_8(20,25,162.5)$ denge noktalarının kararlılık durumlarını gösteren grafik

(12)′ de ifade edilen modelin $x, y > 0$ olacak şekilde Simpleks yöntemiyle çözümünde de aynı nokta (E_17 (20,10,125)) elde edilebilir. Ancak bu yöntem zamandan bağımsız olarak kısıtlayıcı koşullar altındaki ürün sayılarını verir. Önerdiğimiz model zaman parametresi ve diğer denge noktaların durumları açısından senaryoyu değerlendirir.

Aşağıda (13) sistemi için Matlab simülasyon programı kullanılarak elde edilen Şekil 3 ve kullanılan Matlab kodları bulunmaktadır.

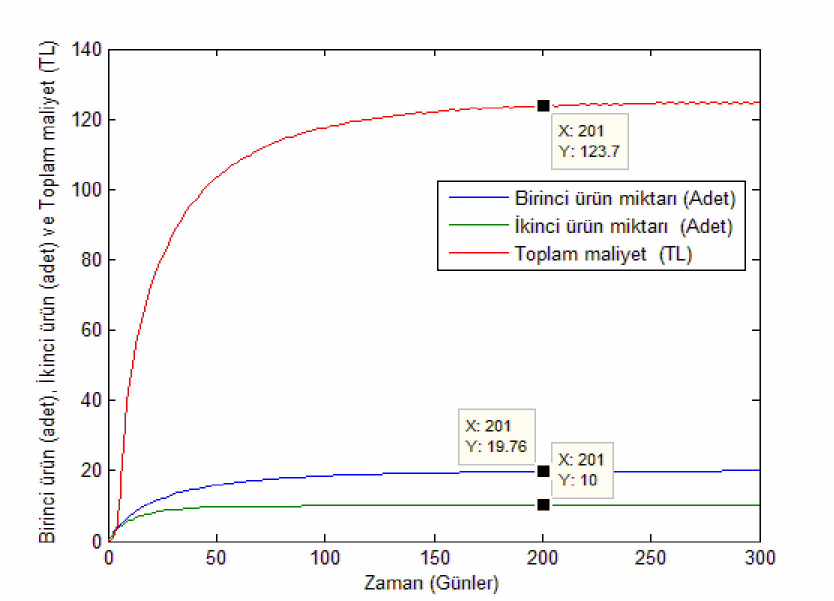
Kullanılan Matlab Kodları

run.m

```
clear;
clear all;
close all
to=0;
tf=300;
yo = [.1 .1 .1];
[t, y] = ode23('gubre',[to tf],yo);
plot(t,y(:,1),t,y(:,2),t,y(:,3))
title('')
xlabel('Zaman (Günler)')
ylabel('Birinci ürün (adet), İkinci ürün (adet) ve
Toplam maliyet (TL)')
```

gubre.m

```
function gubre =gubre (t,y)
gubre(1)=((y(1)/30)-1)*((y(1)/20)-1);
gubre(2) =((y(2)/10)-1)*((y(2)/25)-1);
gubre(3)=y(3)*(1-y(3)/(5*y(1)+2.5*y(2)));
gubre = [gubre(1) gubre(2) gubre(3)]';
```



Şekil 3. (13) sistemi için Matlab simülasyon programı kullanılarak elde edilen grafik

Şekil 3′te $E_7(20,10,125)$ denge noktasının yerel asimtotik kararlılığı ile ilgili durum gözlenmektedir. Ayrıca $t = 201$ zamanı için birinci ürün miktarı yaklaşık olarak 20 (adet), ikinci ürün 10 (adet) ve bu ürünlerin alım maliyeti ise yaklaşık olarak 124 TL değerine yaklaşmaktadır. Dolayısıyla Şekil 3′ e göre yaklaşık 200 gün içerisinde $E_7(20,10,125)$ dengesine ulaşmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Doğrusal Programlama ile bir problemin Simpleks yöntemi ya da grafiksel yöntem ile çözümü yapılmasına karşın optimizasyon problemleri için diferansiyel denklem sistemleri çok daha ayrıntılı sonuç vermede kullanışlıdır. Bu çalışmada DP problemiyle uyumlu olarak önerilen matematiksel model ile farklı denge noktalarının kararlılık durumları ile ilgili bilgiler vermesinin yanı sıra Şekil 3′ te de görüleceği üzere hangi zaman aralığında hangi noktada bulunacağı konusunda ayrıntılı bilgi vermektedir. Dolayısıyla optimizasyon problemleri açısından diferansiyel denklem sistemlerinin kalitatif analizi yardımıyla, sistemi çözmeden çözümlerin hangi noktalar etrafında olabileceği konusunda fikir vermesi açısından çok kullanışlı ve analiz sonuçları ayrıntılıdır.

KAYNAKÇA

ACHDOU, Y., Buera, F. J., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., & Moll, B. (2014). "Partial differential equation models in macroeconomics", *Phil. Trans. R. Soc. A*, *372*, 1-19.

ACHDOU, Y., Lasry, J.-M., Lions, P.-L., & Moll, B. (2014). *Heterogeneous agent models in continuous time,* Princeton: NJ: Princeton University.

ALLEN, L. J. (2007). *An Introduction to Mathematical Biology.*
ALLIGOOD, K. T., Sauer, T., & Yorke., J. (2000). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems,* New York: Springer-Verlag.
ARROW, K. J., & Hahn., F. (1971). *General Competitive Analysi,* San Francisco: Holden-Day Inc.
ARROW, K. J., Block, H., & Hurwicz, L. (1959). "On Stability of Competitive Equilibrium", *Econometrica, 27*, 82-109.
BARAZ, E., & Daşbaşı, B. (2016). "F/k oranı ile endeks getirileri arasındaki ilişki üzerine ampirik bir çalışma: bist100 örneği", *The Journal of Academic Social Science, 4*(34), 478-486.
BARRO, R. J., & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic Growth,* New York: McGraw-Hill, Inc.
BASU, D. (2009). *Economic models Methods, Theory and Applications.* New Jersey: World Scientific.
BLOCK, L. S., & Coppel, W. L. (1992). *Dynamics in One Dimension,* New York: Springer.
BOYCE, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). *Elementary Differential Equations,* New York: John Wiley & Sons.
BRAUER, F., & Nohel, J. A. (1969). *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (1989 b.), Newyork: Inc.
CAGAN, P. (1956). *The Monetary Dynamics of Hyperinflation* (in Friedman, M. (ed.) Studies in the Quantity Theory of Money b.), Chicago: University of Chicago Press.
CAPUTO, M. R. (2005). *Foundations of Dynamic Analysis - Optimal Control Theory and Applications,* Cambridge: Cambridge University Press.
CHIANG, A. (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics,* London: McGraw-Hill Book Company.
CODDINGTON, E. A., & Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations,* New York: McGraw-Hill.
CREPHEY, S. (2013). *Financial Modeling: A Backward Stochastic Differential Equations Perspective,* Berlin: Springer Finance.
DUFFIE, D. (2009, January). "Book review of Stochastic Calculus for Finance", *Bulletin of the American Mathematical Society, 46*(1), 165–174.
EDELSTEIN-KESHET, L. (1988). *Mathematical models in biplogy,* New York: The Random Hause/Birkhäuser.
GANTMACHER, F. R. (1954). *The Theory of Matrices,* New York: Chelsea Pub. Co.
HAHN, F. (1982). *A Handbook of Mathematical Economics* (in Arrow, K.J. and M.D. Intriligator (Eds.) b., Cilt vol. 2), Amsterdam: North-Holland.
Hale, J., & Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations,* New York: Springer-Verlag.
HARRIS, R. (1995). *Using Cointegration Analysis in Econometric Modeling,* London: Prentice Hall.
HIRSH, M. a. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra,* New York: Academic Press.
JOHANSEN, S., & Juselius, K. (1990). "Maximum likelihood estimation and inference on cointegration with application to the demand for money", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 52*, 169-210.
KALDOR, N. (1940). "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal, 50*, 78-92.
LEE, C.-F., Lee, A. C., & Lee, J. (2010). *Handbook of Quantitative Finance and Risk Management,* Boston: Springer.
LORENZ, H. W. (1993). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion,* Berlin: Springer-Verlag.
MERTON, R. C. (1995). *Influence of mathematical models in finance on practice: past, present and future,* Chapman and Hall.
MINSKY, H. P. (1980). "Capitalist Financial Processes and the Instability of Capitalism", *Journal of Economic Issues, 14*(2), 505-523.
MYERS, S. C. (1984). "Financial Theory and financial Strategy", *Interfaces, 14*, 126-137.
NEISY, A., & Peymany, M. (2011). "Financial Modeling by Ordinary and Stochastic Differential Equations", *World Applied Sciences Journal, 13*(11), 2288-2295.
O'BRIEN, C. (1992). "Actuarial Methods in Finance", *The New Palgrave Dictionary of Money and Finance*, 17-20.
PEITGEN, H. H. (1992). *Chaos and Fractals - New Frontiers of Science,* Heidelberg: Springer-Verlag.
PUU, T. (2003). *Attractors, Bifurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics,* Berlin: Springer.
ROUSSEAU, P., & P, W. (1998). "Financial intermediation and economic performance: historical evidence from five industrial countries", *Journal of Money, Credit and Banking, 30*, 657-678.
SHARPE, W. F. (1964, September). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance, 19*(3), 425-442.
SHONE, R. (2002). *Economic Dynamics - Phase Diagrams and Their Economic Application,* Cambridge: Cambridge University Press.
SOLNIK, B. H. (1974, August). "An Equilibrium Model of the International Capital Market", *Journal of Economic Theory, 8*(4), 500-524.
SOLOW, R. (1956). "A Contribution to the Theory of Growth", *Quarterly Journal of Economics, 70*, 65-94.
SWAN, T. W. (1956). "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record, 32*, 334-361.
TOBIN, J. (1970). "Money and Income: post hoc ergo propter hoc?", *Quarterly Journal of Economics, 84*, 301-329.
WEIDLICH, W., & Haag, G. (1983). *Quantitative Sociology,* Berlin: Springer.
YERLİKAYA, Ö. (2011). "İş Çevrimlerinin Lineer Olmayan Dinamikleri: Goodwin'in Büyüme Çevrimleri ve Ampirik bir Uygulama", *Sosyal Bilimler Dergisi, 1*, 33-48.
ZHANG, W. B. (1991). *Synergetic Economics,* Heidelberg: Springer-Verlag.
ZHANG, W. B. (2005). *Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics,* Singapore: World Scientific.